Dynamische Mathematik mit GeoGebra 3D

Andreas Lindner, Pädagogische Hochschule OÖ, Linz

Mit dem 3D-Modul von GeoGebra 5 werden neue Zugänge für die Raumgeometrie in der Schulmathematik ermöglicht.
Anhand von Beispielen aus den Bereichen Elementargeometrie, analytische Geometrie, Kegelschnitte und Volumsberechnung mit Integralen werden die Einsatzmöglichkeiten von GeoGebra 5 vorgestellt.
Eine weitere Neuerung im Materialienpool GeoGebraTube sind die sogenannten GeoGebraBooks. Diese stellen Sammlungen von Arbeitsblättern dar, die Texte, Formeln, Bilder, Videos und Applets beinhalten und je nach Bedarf sehr flexibel gestaltbar sind. Es werden sowohl bereits fertige GeoGebraBooks als auch das Erstellen von GeoGebraBooks präsentiert.

1 Einleitung

Bei seiner Konzeption war die Mathematiksoftware GeoGebra lediglich als Programm für die dynamische Verknüpfung von Geometrie und Algebra angelegt, doch im Lauf der Zeit kamen weitere Module zur Verwendung einer Tabellenkalkulation und für ein Computeralgebrasystem hinzu. Im September 2014 wurde das neue 3D-Modul für GeoGebra veröffentlicht. Es ermöglicht die Darstellung von Körpern in einem eigenen Fenster, das mit den anderen Modulen von GeoGebra wie der zweidimensionalen Grafikansicht dynamisch verbunden ist.
In diesem Artikel sollen exemplarisch einige Beispiele aus den verschiedenen Bereichen der Raumgeometrie, der Analytischen Geometrie, der Darstellenden Geometrie und anderer Teilbereiche der Mathematik vorgestellt werden. Alle Beispiele sind in dem GeoGebraBook „Dynamische Mathematik mit GeoGebra3D" (siehe http://ggbtu.be/b841973) online verfügbar. Ziel ist es, einen Überblick über die Möglichkeiten, die GeoGebra mit dem 3D-Modul bietet, zu geben. Deshalb wird auf eine detaillierte Besprechung der Lösungswege aller vorgestellten Beispiele nicht eingegangen. Leider kann in einer schriftlichen Beschreibung die Dynamik der Arbeitsblätter nicht entsprechend wiedergegeben werden, sodass alle Leserinnen und Leser eingeladen werden, die Online-Materialien begleitend zum vorliegenden Beitrag auszuprobieren.

GeoGebra 3D und GeoGebraBooks

GeoGebraBooks sind eine Form von digitalen "Büchern" und stellen eine Möglichkeit dar, Materialien zu einem bestimmten Thema zu sammeln. Dabei muss es sich nicht notwendigerweise um mathematische Inhalte handeln. In GeoGebraBooks können zum momentanen Zeitpunkt (April 2015) Texte, Formeln, Grafiken, Applets und Videos integriert werden, wie in der Anleitung „Creating a GeoGebraBook" (Kimeswenger, 2011) gezeigt wird. An der Erweiterung dieser Möglichkeiten wird aber kontinuierlich gearbeitet.
Ein entsprechendes Beispiel zur Einbindung der verschiedenen Gestaltungselemente wird in dem begleitenden GeoGebraBook unter dem Abschnitt *1. Einleitung* vorgestellt.

Kurzvorstellung des Programms

In einer kurzen Sequenz sollen die wesentlichen Neuerungen von GeoGebra im Zusammenhang mit dem 3D-Modul kurz vorgestellt werden.
Die Oberfläche des Programms erscheint beim erstmaligen Öffnen von GeoGebra 5.0 in der gewohnten Form mit dem Algebra- und dem Grafik-Fenster. Die Änderungen in der neuen Version sind erst erkennbar, wenn man unter dem Menüpunkt *Ansicht* das neu hinzugekommene Modul *3D Grafik* aufruft. Dadurch wird eine zusätzliche Ansicht mit einem

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 48, 2015, S 58 - 67

dreidimensionalen Koordinatensystem geöffnet, die das Arbeiten mit GeoGebra in der gewohnten Art ermöglicht, nur eben nun in einem Raumkoordinatensystem (siehe Abb. 1). Bewegt werden kann das Koordinatensystem in der *3D Grafik* mit der rechten Maustaste.

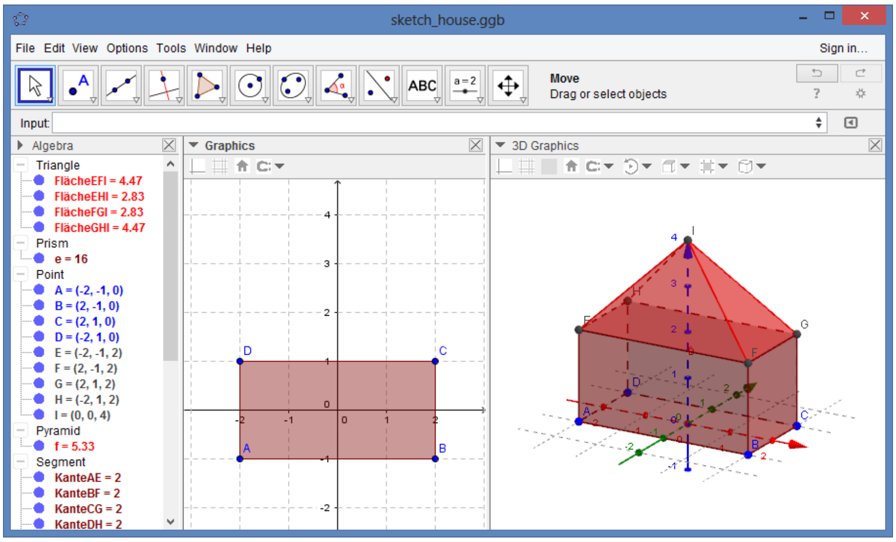


Abbildung 1: GeoGebra mit Algebra-, Grafik- und 3D-Grafik-Fenster

Die bisher in GeoGebra zur Verfügung stehenden Werkzeuge wie Gerade, Strecke, Vieleck etc. können in analoger Weise auch in der *3D Grafik* - Ansicht verwendet werden. Gerade diese intuitive und an die bisherige Handhabung des Programms angelehnte Bedienung soll den Einstieg bzw. Umstieg auf das 3D-Modul vereinfachen.
Durch Wechseln der Projektionsart kann ein Objekt unterschiedlich dargestellt werden. Es stehen vier Möglichkeiten zur Auswahl, wobei für das Betrachten der Bilder in der 3D-Darstellung (Anaglyphendarstellung) eine 3D-Brille (in rot-cyan) benötigt wird.

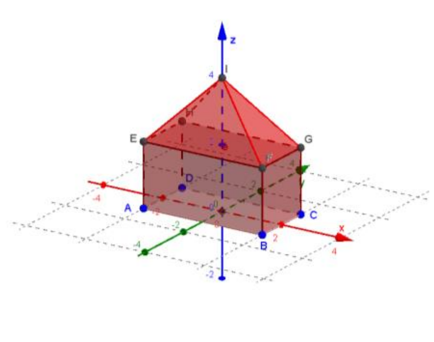


Abbildung 2: Parallelprojektion

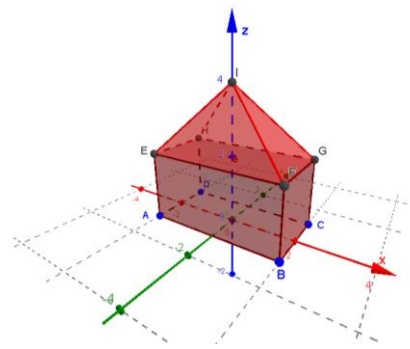


Abbildung 3: Perspektive

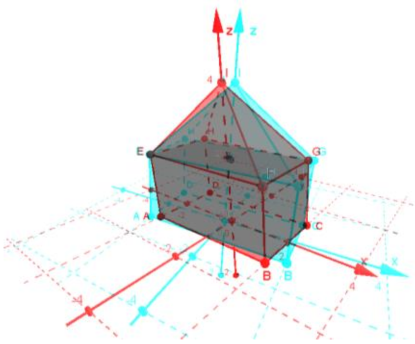


Abbildung 4: 3D-Darstellung

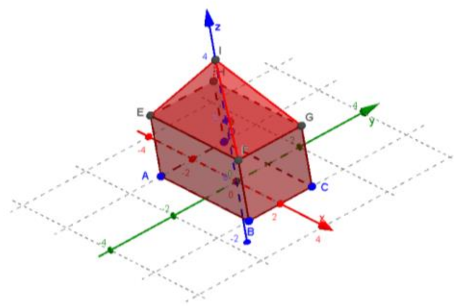


Abbildung 5: Schrägriss

Auch die algebraische Darstellung der dreidimensionalen geometrischen Objekte ist eine konsequente Fortsetzung des im zweidimensionalen eingeschlagenen Weges. Geraden werden in Parameterform angezeigt, beispielsweise als $g: X = (1,2,3) + \lambda(2,-1,1)$, Ebenen in der Form $\varepsilon: 3x + y - 2z = 1$ und Kugeln mit $k: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. Dies ermöglicht auch eine rechnerische Behandlung eines Problems im CAS von GeoGebra. Gerade im Hinblick auf die Analytische Geometrie stellt dies ein mächtiges Werkzeug dar und ermöglicht ein Zusammenspiel von rechnerischer Behandlung und geometrischer Lösung einer Aufgabenstellung.

Zur Sinnhaftigkeit des Einsatzes von dynamischer Mathematiksoftware

Die Einsatzmöglichkeiten von GeoGebra können wie allgemein der Einsatz von Technologie im Mathematik- bzw. Geometrieunterricht nach verschiedenen Aspekten unterschieden werden. Wichtige Funktionen bei der Unterstützung im Lernprozess, die durch den Einsatz von didaktischer Geometriesoftware gefördert werden kann, sind:

- Visualisieren
- Experimentieren und Erforschen
- Modellieren
- Bilden von Begriffen

In vielen Bereichen wird eine genaue Trennung der einzelnen Einsatzmöglichkeiten nicht immer gelingen und ist auch gar nicht nötig. Die folgenden Beispiele sollen Anregungen in dieser Hinsicht geben und Möglichkeiten für den Einsatz im Unterricht aufzeigen.

2 Raumgeometrie

Für das Konstruieren von Körpern, die anschließend dynamisch veränderbar sein sollen, eignet sich GeoGebra3D in hervorragender Weise. So werden Werkzeuge zum Erstellen von Pyramiden, Prismen, Kegeln, Kugeln und Zylindern zur Verfügung gestellt. Bei Polyedern ist außerdem das automatische Erzeugen eines Netzes möglich.
Ein Beispiel dafür ist das Netz einer Pyramide, das mithilfe eines Schiebereglers gefaltet werden kann, wie Abb. 6a und 6b zeigen.

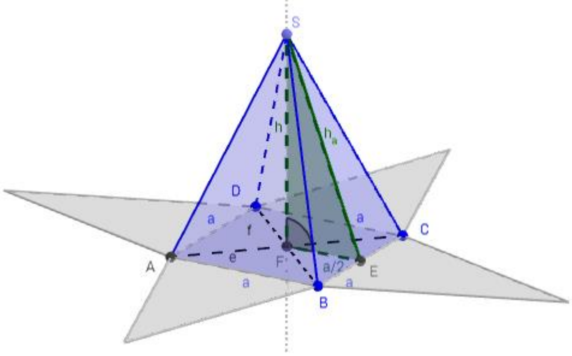


Abbildung 6a: Pyramide mit ausgebreitetem Netz

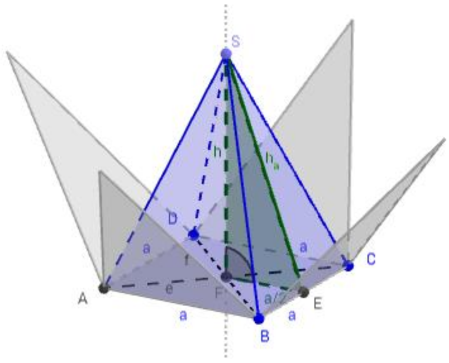


Abbildung 6b: Pyramide mit gefaltetem Netz

Das automatische Generieren eines Netzes eines Körpers ist allerdings nicht dieselbe Tätigkeit wie das eigenhändige Zeichnen dieses Netzes – dies hat eine ganz andere Qualität. Es setzt wesentlich mehr planende gedankliche Aufbereitung voraus, ein Netz mit Papier und Bleistift zu konstruieren, etwa bei der richtigen Anordnung der Seitenflächen. Deshalb sollte das automatische Generieren eines Netzes mit entsprechender Software nicht das selbständige Konstruieren eines Netzes ersetzen, sondern in entsprechenden Aufgaben sinnvoll ergänzen.

Beim Einsatz von GeoGebra zum erforschenden und entdeckenden Lernen ist die Selbsttätigkeit der Schüler von größter Bedeutung. Bei sehr umfangreichen und detaillierten Konstruktionen ist allerdings der notwendige Zeitaufwand ein großes Problem für die Unterrichtsgestaltung. In diesem Fall eignen sind fertige Applets, die mit konkreten Aufgabenstellungen verbunden sind, eine praktikable Lösung.
Als Beispiel dafür soll die Abwicklung eines Kegels erwähnt werden. Die Abwicklung kann von den Schülerinnen und Schülern mithilfe von Schiebereglern durchgeführt werden, wobei die Größe des Kegels dynamisch veränderbar ist.

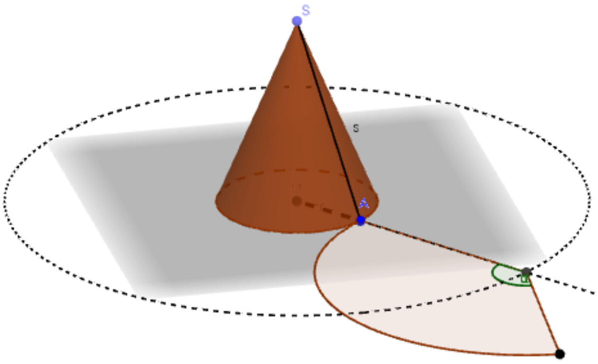
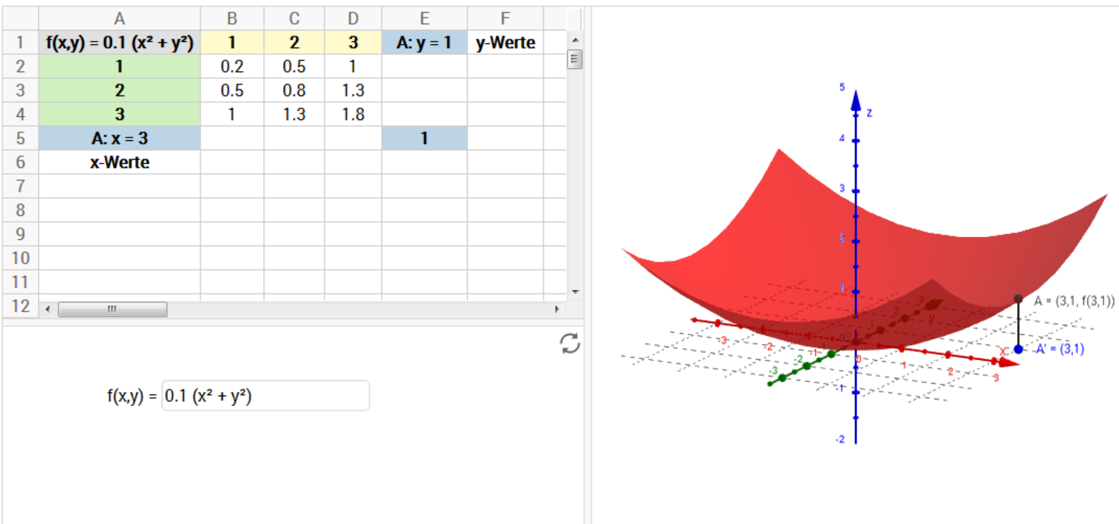


Abbildung 7: Kegel mit Mantel

Ergänzend könnten von der Lehrkraft Fragen zum entdeckenden Lernen formuliert werden, beispielsweise die Aufforderung herauszufinden, unter welchen Bedingungen der Mantel des Kegels genau einen Halbkreis bildet.

3 Funktionen

In den Lehrplänen von höheren Schulen wird auch das Kennenlernen von Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs angesprochen (BMBF, 2004, S. 5). Darunter fällt auch die Verwendung von Funktionen in zwei Variablen, deren Graph als Fläche im Raum dargestellt werden kann. Eine Veranschaulichung von Flächen ist ohne elektronische Hilfsmittel allerdings recht mühsam und mitunter wenig effizient. Auch hier bietet GeoGebra eine einfache Möglichkeit, diese Flächen zu visualisieren und gleichzeitig die Funktionswerte in einer erweiterten Tabelle zu berechnen. Hier stellt die Kombination von *Grafik 3D* und dem *Tabelle*-Fenster eine günstige Variante dar.



	A	B	C	D	E	F
1	f(x,y) = 0.1 (x² + y²)	1	2	3	A: y = 1	y-Werte
2	1	0.2	0.5	1		
3	2	0.5	0.8	1.3		
4	3	1	1.3	1.8		
5	A: x = 3				1	
6	x-Werte					
7						
8						
9						
10						
11						
12						

Abbildung 8: Graph einer Funktion in zwei Variablen

Gerade die Möglichkeit, die Fläche im *Grafik 3D*-Fenster zu bewegen, zu drehen, rotieren zu lassen und in die Konstruktion zu zoomen, schafft für Lernende die Voraussetzung, sich das geometrische Objekt entsprechend vorzustellen.
Durch die Eingabe beliebiger Funktionsterme in einem Eingabefeld können Studierende die Graphen anderer Funktionen untersuchen.

4 Analytische Geometrie

Gerade die analytische Geometrie stellt einen Teilbereich der Mathematik dar, bei dem die rechnerische Behandlung eines Problems mit geometrischen Überlegungen einhergeht. In GeoGebra3D ist es nun bei gleichzeitiger Verwendung von CAS und der 3D-Ansicht möglich, die Aufgabe auf geometrischem und rechnerischem Weg zu lösen, wobei die Ergebnisse der rechnerischen Lösung in der CAS - Ansicht ersichtlich sind.
Abb. 9 zeigt die konstruktive und rechnerische Lösung für den Schnitt von drei Ebenen.

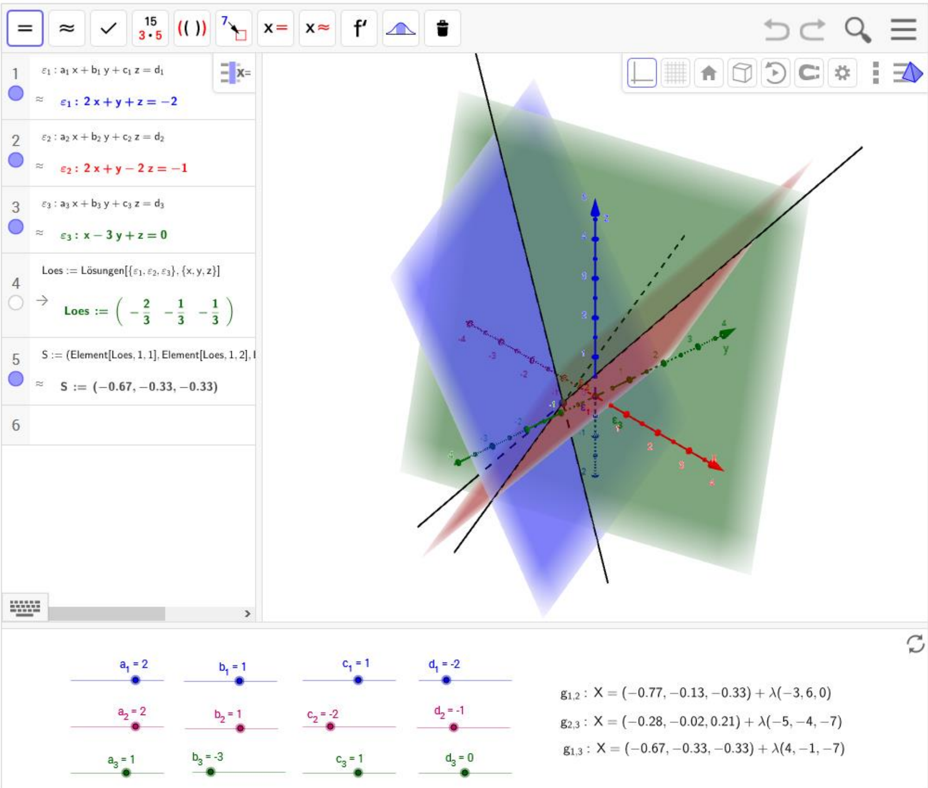


Abbildung 9: Schnitt von drei Ebenen

Wie in allen Fällen ist auch hier das CAS-Fenster dynamisch mit dem *Grafik 3D*-Fenster verbunden und umgekehrt. Das bedeutet, dass eine Änderung in der Angabe einer Ebene eine Änderung der Koordinaten des Schnittpunkts und der Schnittgeraden nach sich zieht. Im Mittelpunkt des Interesses steht in diesem Beispiel allerdings nicht so sehr das operative Arbeiten, das Berechnen des Schnittpunkts oder der Schnittgeraden, da diese Aufgabe schon vom Programm übernommen wird. Vielmehr besteht die Herausforderung für Studierende darin, die Koeffizienten der Ebne so zu bestimmen, dass zwei oder alle drei Ebenen parallel sind oder dass sich alle drei Ebenen als Ebenenbüschel in einer einzigen Geraden schneiden. Dazu sind ein anderes Hintergrundwissen und andere Kompetenzen notwendig als zur Ausführung einer Berechnung.
Der Schwerpunkt der Aufgabenstellung verlagert sich somit vom Operieren hin zu einem verständnisorientierten Lernen und zum Reflektieren, wie es auch im Zuge der neuen zentralen Reifeprüfung gefordert wird (BIFIE, 2011, S. 73).

5 Differentialrechnung

Auch im Bereich der Differentialrechnung finden sich einige Beispiele, bei denen GeoGebra3D eine hilfreiche Unterstützung bietet. So kann etwa bei Extremwertaufgaben die Darstellung von räumlichen Objekten im *Grafik 3D*-Fenster zur Klärung der Problemstellung beitragen. Beim vorgestellten Beispiel der Berechnung des maximalen Volumens eines Kegels mit eingeschriebenem Zylinder hilft das Betrachten der Körper von unterschiedlichen Blickwinkeln aus den Studierenden zu erkennen, an welchen Stellen die Berührung der Körper erfolgt und welche Nebenbedingungen dadurch festgelegt werden.

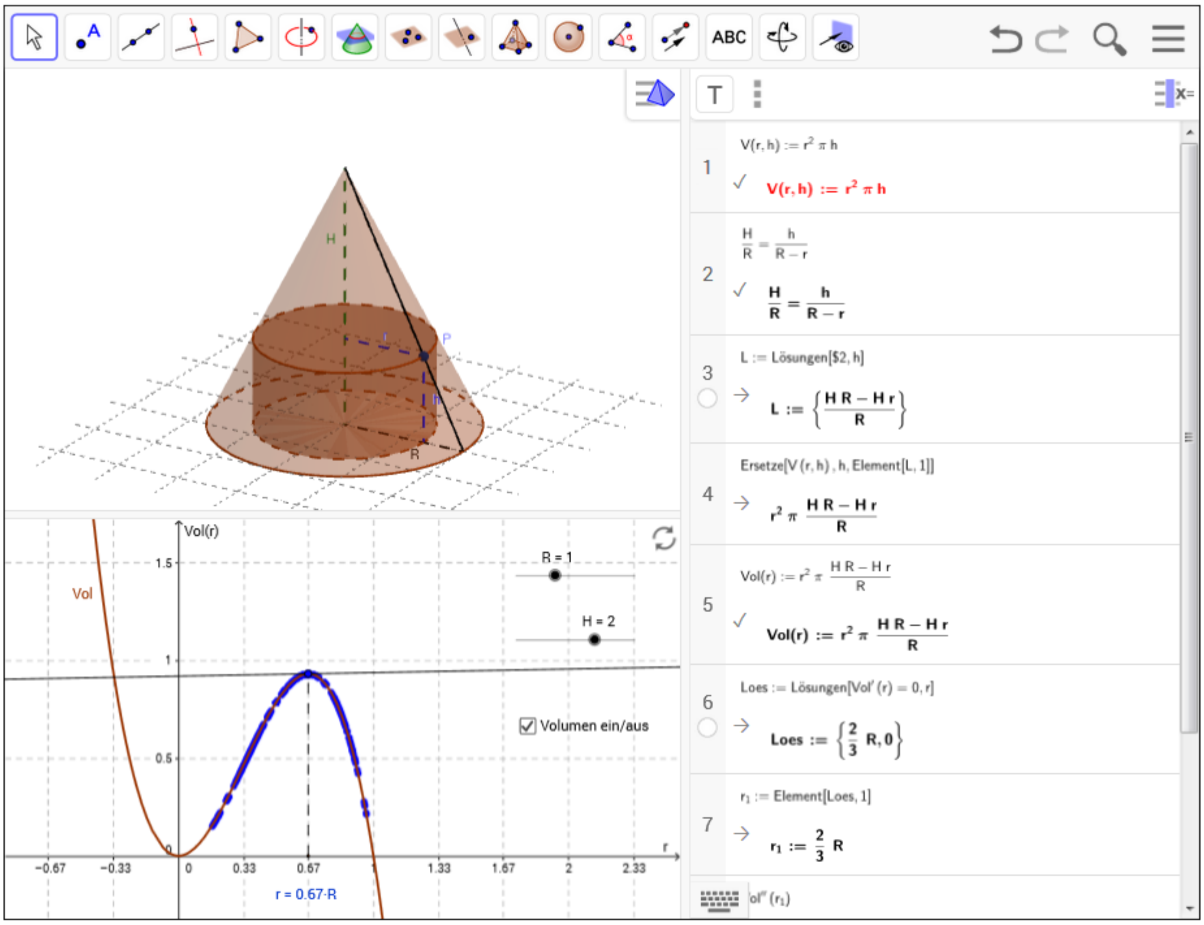


Abbildung 10: Verbindung des Grafik-Fensters mit dem Grafik 3D-Fenster und der CAS-Ansicht

Ergänzend dazu kann durch Verschieben des Punktes P auf einer Erzeugenden des Kegels herausgefunden werden, für welchen Radius das Volumen des eingeschriebenen Zylinders maximal wird. Aus zeitlichen Gründen wird es vermutlich nicht möglich sein, solche eher aufwändigen Konstruktionen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern im Unterricht zu entwickeln. Zweckmäßiger ist es, ein (teil)fertiges Arbeitsblatt zur Verfügung zu stellen. Das Lösen der Aufgabe mit dem CAS von GeoGebra kann allerdings von den Lernenden selbständig oder mit Unterstützung der Lehrkraft bewerkstelligt werden.
Dieses Beispiel zeigt eine Verknüpfung eines empirisch-numerischen Lösungsweges und eines analytisch-theoretischen Weges (CAS), wobei im Unterricht beide Aspekte ihre Bedeutung haben (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006).

Manche Anwendungen, die mit GeoGebra3D ermöglich werden, gehen über die Lehrinhalte des klassischen Schulstoffs von höheren Schulen hinaus. Diese Beispiele können dennoch

für die Hochschuldidaktik interessant sein, etwa im Bereich von Fachhochschulen oder Pädagogische Hochschulen.
Als Beispiel sei hier exemplarisch die Darstellung einer Fläche mit Tangentialebene genannt.

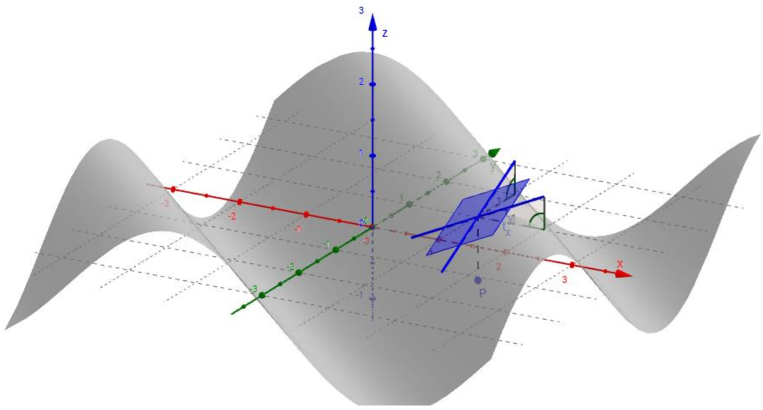


Abbildung 11: Tangentialebene an eine Fläche

Studierende können durch Verschieben des Punktes, in dem die Tangentialebene die Fläche berührt, die Eigenschaften der Ebene und der beiden Tangenten in x- und y-Richtung für unterschiedliche Flächen untersuchen. Die entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktion werden im CAS berechnet. Auch Animationen sind im Zusammenhang mit 3D-Darstellungen möglich, wie die Online-Version dieses Beispiels zeigt.

6 Integralrechnung

Wenn es um Anwendungen der Integralrechnung geht, dann werden neben Beispielen aus den Naturwissenschaften oft die Berechnungen von Volumina besprochen.
Ähnlich wie bei der Herleitung des Integralbegriffs mit Unter- und Obersummen argumentiert wird, kann auch im Fall eines Volumens von der Annäherung durch eine Summe von Prismen oder Zylindern ausgegangen werden.

Das Beispiel „Dom zu Speyer“ zeigt die näherungsweise Berechnung des Volumens der Kuppel des Doms in Speyer.

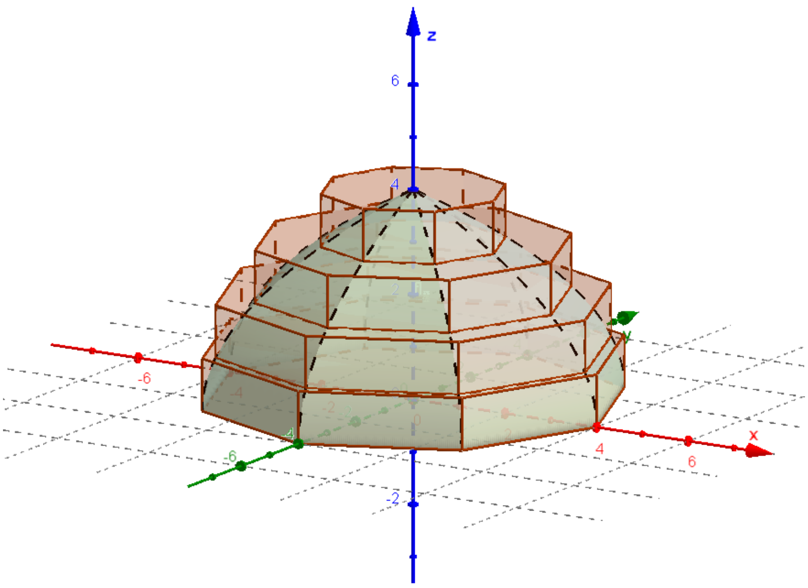


Abbildung 12: Näherungsweise Berechnung einer Kuppel mit Prismen

Die Schülerinnen und Schüler sollen nun mithilfe eines Schiebereglers die Anzahl der Unterteilungen erhöhen und beobachten, wie sich die (endliche) Summe des Volumens aller Prismen immer mehr einem bestimmten Wert annähert.
Dies soll auf den Übergang zum Integral hinführen, wobei der letzte gedankliche Schritt für den Übergang zu unendlich vielen Unterteilungen natürlich nicht visualisiert werden kann und die geistige Eigenleistung jedes Lernenden bleiben muss.

Auch die nächsten beiden Arbeitsblätter sollen eine Hilfe beim Lernprozess im Zusammenhang mit Volumina von Rotationskörpern sein. Nicht allen Schülerinnen und Schülern ist unmittelbar klar, welche Gestalt ein Rotationskörper bei der Rotation um die x- bzw. um die y-Achse hat. Dabei hilft das Applet in Abb. 13, das zeigt, wie der Graph um die jeweilige Achse rotiert und welche Form der dadurch entstehende Körper bekommt.

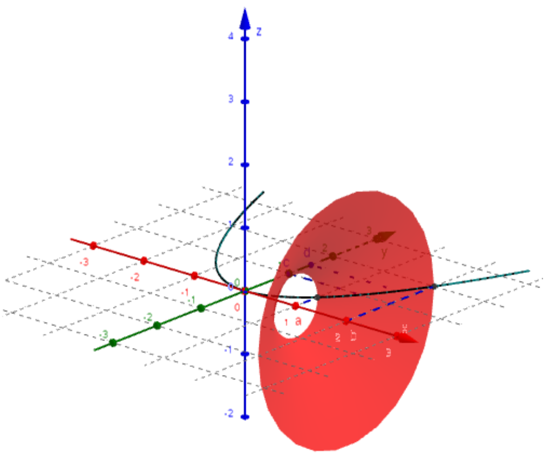


Abbildung 13: Darstellung eines Rotationskörpers

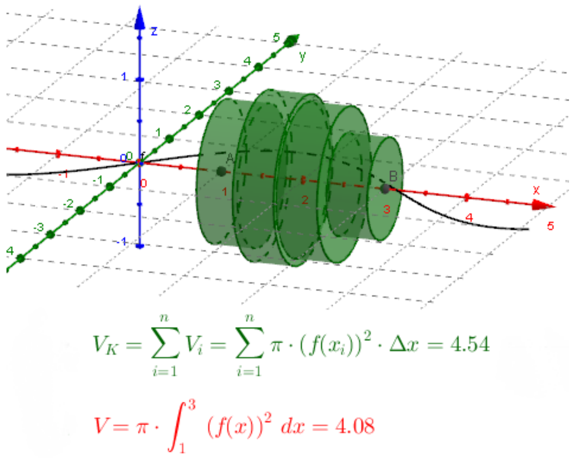


Abbildung 14: Berechnung des Rotationsvolumens

In engem Zusammenhang mit der Visualisierung des Rotationskörpers steht die Berechnung des Volumens. Abb. 14 zeigt die näherungsweise Berechnung des Volumens mit endlich vielen Zylindern und die Annäherung an einen bestimmten Wert bei der Erhöhung der Anzahl der Unterteilungen. Auch hier steht nicht die konkrete zahlenmäßige Berechnung des Volumens im Vordergrund, da diese Aufgabe von jedem Mathematikprogramm mit einem entsprechenden Integral gelöst werden kann. Vielmehr soll der Prozess der Annäherung sichtbar und nachvollziehbar gemacht werden.
Erwähnt werden soll noch, dass aus Gründen der einfacheren Erstellung der einzelnen Zylinderscheiben keine echten Ober- oder Untersummen gebildet worden sind. Es werden der Einfachheit halber nur die Funktionswerte am linken Ende jedes Teilintervalls genommen, um die Rechenzeit zu optimieren und eine dynamische Veränderung der Konstruktion ohne Rucken zu ermöglichen.
Manche dieser Beispiele fallen nicht in den Kernbereich der Grundkompetenzen für die zentrale Reifeprüfung, stellen aber doch einen wertvollen Beitrag zur mathematischen Allgemeinbildung dar.

7 Darstellende Geometrie

Weitere Einsatzmöglichkeiten für GeoGebra 3D finden sich im Unterrichtsgegenstand *Darstellende Geometrie*. Auch wenn GeoGebra kein CAD-Programm im eigentlichen Sinn

ist, so stellt vor allem die Dynamik der Arbeitsblätter eine Berechtigung für einen sinnvollen Einsatz dar.
Exemplarisch sei an dieser Stelle der Beweis der Kegelschnittslinien nach Dandelin erwähnt. Abb. 15 zeigt die Kombination einer 3D Grafik mit einer zweidimensionalen Darstellung. GeoGebra bietet die Möglichkeit, in einem eigenen Fenster eine Normalprojektion auf eine beliebige Ebene – in diesem Fall auf die senkrechte (graue) Ebene zu erzeugen.

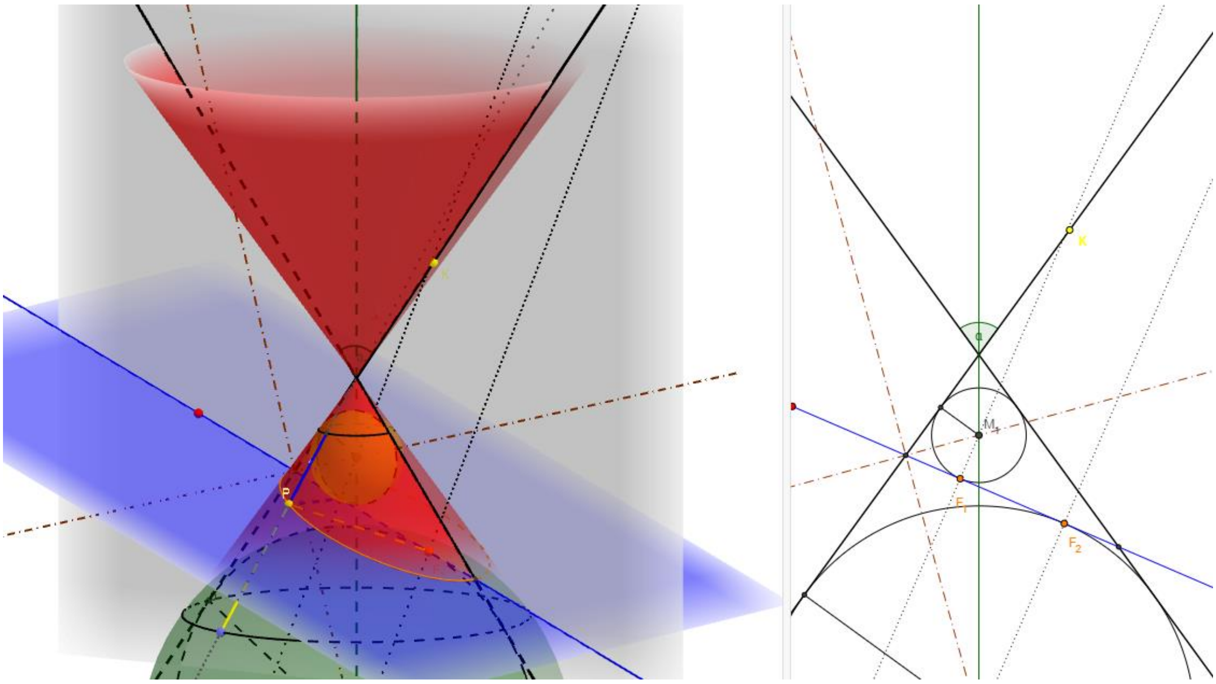


Abbildung 15: Schnitt eines Kegels nach Dandelin

Dabei bleibt die dynamische Verknüpfung der beiden Ansichten gewahrt, sodass beispielsweise die Form des Kegels oder die Lage der Schnittebene sowohl im linken wie auch im rechten Fenster verändert werden können. Der Vorteil gegenüber bekannten Modellen aus Plexiglas besteht natürlich in der Veränderbarkeit der Konstruktion.

8 Physik

Dass GeoGebra3D nicht nur für Mathematik und (Darstellende) Geometrie genutzt werden kann, soll ein abschließendes Beispiel aus der Physik zeigen.
Die wesentliche Eigenschaft einer Welle liegt in ihrer Ausbreitung mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Diese Charakterisierung kann niemals mit einem statischen Bild eingefangen werden, bestenfalls mit einer Reihe von Einzelbildern. Mithilfe von dynamischer Mathematiksoftware kann diese Ausbreitung entsprechend sichtbar gemacht werden. Abb. 16 zeigt die Überlagerung zweier normal zueinander stehender Wellen mit einer bestimmten Phasenverschiebung, die als Ergebnis eine zirkular polarisierte Welle ergeben.

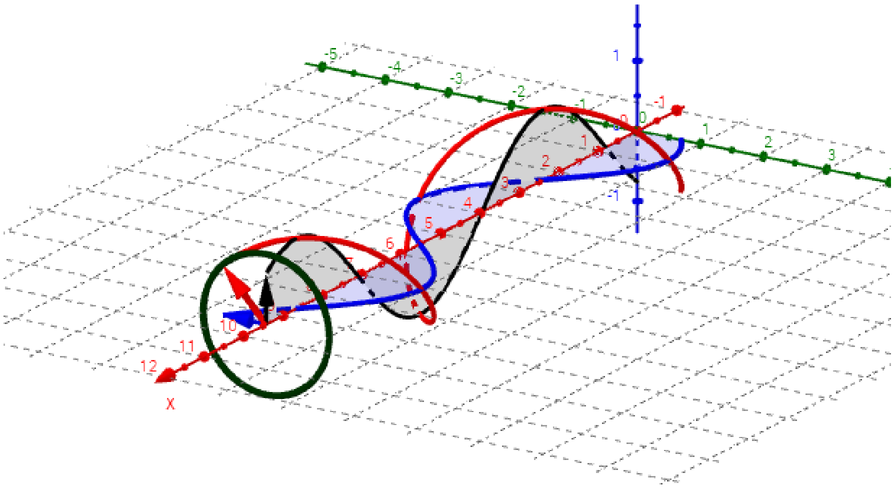


Abbildung 16: Zirkular polarisierte Welle

Mit Schiebereglern können die Studierenden die Abhängigkeit der Überlagerung von den Teilwellen bzw. von der Phasenverschiebung erkunden.

9 Zusammenfassung

GeoGebra stellt mit dem neuen 3D-Modul ein mächtiges Werkzeug für viele Bereiche der Mathematik dar. Dabei muss sich der Einsatz von GeoGebra nicht auf die Schulmathematik beschränken, sondern kommt inzwischen bereits vielerorts in der Hochschuldidaktik vor. Neben der dominierenden Möglichkeit zur Visualisierung von Sachverhalten kann die 3D Grafik ebenso für Tätigkeiten aus den Handlungsdimensionen Begründen, Argumentieren, Beweisen und Modellieren herangezogen werden. Die Verwendung von GeoGebra beschränkt sich nicht nur auf Mathematik und Geometrie sondern ebenso auf manche Naturwissenschaften.

LITERATUR

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2011). Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe – Auf dem Wege zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1. Graz: Leykam. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1354 [8.10.2015].

Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF) (Hrsg.) (2004): Lehrplan Mathematik Oberstufe AHS. Verfügbar unter http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf [8.10.2015]

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Berlin Heidelberg: Springer.

Kimeswenger, B. (2015) : Creating a GeoGebraBook. GeoGebraTube. Verfügbar unter http://tube-beta.geogebra.org/b/1425019 [8.10.2015]

Lindner, A. (2015): Dynamische Mathematik mit GeoGebra3D. GeoGebraTube. Verfügbar unter http://ggbtu.be/b841973 [8.10.2015]